BIBLIOTHÈQUE SCIENTIFIQUE

Jean-Paul Delahaye

Jeux mathématiques et mathématiques des JEUX

BELIN • POUR LA SCIENCE

Jeux mathématiques et mathématiques des jeux

Jean-Paul Delahaye

BIBLIOTHÈQUE POUR LA SCIENCE

Table des matières

Préface

Lorsque Jean-Paul Delahaye m'a demandé d'écrire quelques mots d'introduction pour un recueil regroupant certains des articles qu'il a écrits au fil des ans dans *Pour la Science*, c'est avec joie et enthousiasme que j'ai accepté. Je connais en effet Jean-Paul depuis plusieurs années, puisqu'il me demande parfois mon opinion sur certains de ses écrits lorsqu'ils touchent à la cryptographie ou au traitement quantique de l'information. Bien que j'avais lu plusieurs de ses rubriques avec grand intérêt, je n'étais pas préparé à ce qui m'attendait à la réception de l'ébauche de son recueil : j'ai trouvé cette collection tellement fascinante, tant par sa qualité que par sa diversité, qu'il m'a été quasiment impossible de la déposer avant de l'avoir dévorée! Ce livre est comme un sac d'arachides : on ne peut pas en manger une sans que cela donne envie de terminer le sac. Contrairement aux arachides, toutefois, chaque chapitre présente le plaisir d'une nouvelle découverte.

Il y a trop peu de vulgarisateurs de talent qui font carrière dans la francophonie. Peut-être est-ce dû au fait malheureux que cette forme de littérature n'est guère valorisée en France. Trop nombreux sont les chercheurs qui vont même jusqu'à mépriser cette discipline, ayant l'impression qu'il est inutile d'essayer de faire apprécier la beauté de la science à un public peu spécialisé. Quant à ceux qui y parviennent, ils découvrent trop souvent que cet effort n'est généralement pas apprécié à sa juste valeur par ceux qui prennent des décisions sur l'avancement de leur carrière ou leur financement. Je crois sincèrement que cette attitude est désolante et qu'il est au contraire primordial que le grand public puisse apprécier la science à sa juste valeur. Après tout, il ne faut pas perdre de vue que c'est ce public, à travers les hommes politiques qu'il élit, qui finance la recherche et les universités.

Certaines sciences se prêtent particulièrement bien à la vulgarisation, car elles ont toujours frappé l'imagination du commun des mortels. Par exemple, les ouvrages remarquables de mon compatriote Hubert Reeves font un malheur auprès d'un public avide d'astronomie et de cosmologie. Il est certes plus difficile de passionner le grand public pour les mathématiques et l'informatique. Pour y parvenir, il est important de faire preuve de diversité dans les sujets traités. Martin Gardner, qui a écrit les *Mathematical Games* du *Scientific American* pendant tant et tant d'années, est devenu un maître incontesté dans cet art. Je considère que Jean-Paul Delahaye lui est un digne successeur. Il allie d'incontestables talents d'écrivain à une carrière de chercheur qui est aussi fructueuse que diversifiée.

C'est avec grand plaisir que j'ai appris que la Société mathématique de France vient d'attribuer le prix d'Alembert 1998 à Jean-Paul Delahaye pour son livre *Le fascinant nombre π*. Voilà une récompense bien méritée pour un chercheur disposé à relever le défi considérable et souvent ingrat de la vulgarisation. S'il faut du courage pour prendre le risque d'investir beaucoup de temps et d'énergie dans la vulgarisation, il est heureux de constater que cet effort est parfois récompensé.

Il me reste à souhaiter que le recueil que vous tenez entre vos mains vous plaira autant qu'à moi. J'espère également que Jean-Paul continuera à écrire de façon régulière dans *Pour la Science*, pendant assez longtemps pour que cette compilation soit suivie de nombreuses récidives qui seront, à n'en pas douter, toutes plus fascinantes les unes que les autres.

Gilles Brassard
Membre de l'Académie des sciences
de la Société royale du Canada

Avant-propos

«Dans ce pays [l'Égypte], des jeux arithmétiques ont été inventés pour les enfants, qui apprennent ainsi en s'amusant et avec plaisir. On leur fait distribuer des pommes et des guirlandes à un nombre de personnes parfois égal, parfois inférieur ou parfois supérieur au nombre d'objets dont ils disposent ; ils doivent regrouper des lutteurs et des pugilistes par paires ou par groupes et montrer comment on peut les associer en classes naturelles. [...] Ce faisant, dans ces amusements, les nombres deviennent familiers aux enfants, ce qui leur rend intelligibles les mouvements et les expéditions des armées, les prépare à bien s'occuper de leurs affaires tout en rendant plus vif leur raisonnement.»

Platon (–428––348)

«Les hommes ne sont jamais aussi ingénieux que lorsqu'ils inventent des jeux ; l'esprit y trouve de grandes satisfactions... Après les jeux qui ne dépendent que des nombres, viurent les jeux de positions, puis les jeux de déplacements... nous pouvons espérer que les mathématiques analyseront un grand nombre de jeux.»

Leibniz (1646-1716)

Platon et Leibniz, comme de nombreux philosophes ou hommes de science, ne s'y sont pas trompés : les jeux sont une source inépuisable de situations abstraites dont l'étude et la compréhension enrichissent ceux qui s'en occupent... tout en les divertissant. Ils sont le meilleur moyen de faire apprécier et pratiquer les mathématiques. Je sais que j'ai commencé à les aimer en jouant aux cartes avec mes frères, aux échecs avec mon père et aux dominos avec mon grand-père (il nous avait appris un jeu qu'il appelait le *Bata*, dont nous faisions des parties passionnées tard le soir).

Le rapport des mathématiques avec le jeu est tel, d'ailleurs, que ceux qui ne les aiment pas disent parfois que «les mathématiques ne sont qu'un jeu», sous-entendant qu'elles ne servent pas à grand-chose et ne sont qu'un prétexte pour s'amuser et fuir les «vrais» problèmes.

C'est peut-être vrai parfois : toute étude d'un jeu ne se révèle pas nécessairement riche d'enseignements transposables à d'autres domaines. Toutefois, le nombre de cas où les jeux se sont trouvés à l'origine de théories profondes et indubitablement utiles est si grand qu'il faut retourner la critique : faisons que toutes les mathématiques ne soient qu'un jeu, cela permettra à chacun d'y progresser et évitera que des gens cultivés et intelligents se montrent parfois si ignorants et incapables dès qu'il s'agit de manipuler quelques nombres, figures géométriques ou combinaisons de symboles algébriques.

Les développements de la théorie des probabilités au XVIIe siècle sont nés de l'étude des jeux de hasard (le chapitre 1 traite quelques situations paradoxales qu'on y rencontre). La théorie des réseaux d'automates finis (dont le *Jeu de la vie*, abordé au chapitre 5, est un cas particulier) est à l'origine du domaine de recherche de la *vie artificielle* et sert de base à des simulations en physique. Le dilemme des prisonniers (le jeu le plus simple qu'on puisse imaginer, chapitre 9) est considéré comme un modèle pertinent pour représenter certaines interactions sociales, la compétition entre espèces vivantes et les relations entre agents économiques ou informatiques. La théorie des ensembles tire une partie de ses résultats de la prise en considération de jeux infinis *(voir le chapitre 7)*. On pourrait continuer longtemps, montrant par le détail à quel point mathématiques et jeux ne sont peut-être qu'une seule et même chose.

Dans cet ouvrage, qui regroupe 20 articles parus dans la rubrique «Logique et calcul» de la revue *Pour la Science*, on rencontrera d'ailleurs bien d'autres situations où un jeu avec les nombres, avec des cartes, avec des casse-tête, avec des images introduit des raisonnements et fait découvrir des structures abstraites inattendues, parfois nouvelles, toujours amusantes.

Les chapitres sont tous indépendants les uns des autres (sauf, d'une manière totalement surprenante, la fin du chapitre 14, qui utilise les codes de Gros-Gray présentés au chapitre 13). Leur lecture ne nécessite aucune connaissance scolaire préalable ne demandant au lecteur que le goût du jeu qui, je l'espère, se transformera vite, s'il ne l'avait déjà, en goût pour les mathématiques.

Jean-Paul DELAHAYE

1

La désespérante espérance des jeux paradoxaux

Que penser des critères de décision fondés sur la notion d'espérance mathématique?

Un de vos amis vous propose le jeu suivant : tu mises 10 F, ensuite tu lances un dé. Si tu sors le 6, je te donne 30 F (tes 10 F de mise plus 20 F de ma poche) ; sinon, je ne te donne rien et j'empoche tes 10 F.

Votre intérêt est-il de jouer?

Non, bien sûr, car en moyenne, sur six parties, vous aurez gagné 30 F et dépensé 60 F, ce qui fait 5 F de perdu en moyenne par partie. En théorie des probabilités, on dit que votre espérance mathématique à chaque partie est de –5 F. Cette espérance mathématique est égale à la somme des gains (et des pertes), chacun multiplié par la probabilité du gain (ou de la perte) : dans notre jeu, cette espérance mathématique est égale à (20 F) × 1/6 + (–10 F) × 5/6 = –5 F. Lorsqu'elle est négative, vous ne devez pas jouer : en moyenne, vous perdrez la valeur de cette «espérance».

Si votre ami vous proposait 80 F en plus de votre mise, au lieu de 20 F, pour une sortie du 6, votre espérance mathématique serait (80 F – 50 F)/6, soit 5 F par partie, et vous auriez intérêt à jouer. S'il vous proposait 50 F au lieu de 20 F, votre espérance mathématique à chaque partie serait nulle. Dans ce dernier cas, on dit que le jeu est équitable.

Les deux lois de base du joueur éclairé

La notion d'espérance mathématique, que l'on pourrait aussi appeler gain moyen espéré, est parfaitement claire, et il semble naturel et rationnel d'énoncer les deux lois de base du joueur éclairé :

Loi 1 : Lorsqu'on te propose un jeu, si l'espérance est positive, accepte d'y jouer, si elle est négative, refuse d'y jouer ; si elle est nulle, fais ce qui te plaît.

Loi 2 : Entre deux jeux, si tu es contraint de jouer, choisis celui dont l'espérance mathématique est la plus élevée.

Le calcul de l'espérance mathématique d'un jeu est rarement aussi simple que dans notre exemple, mais soyez certain, que lorsqu'un casino vous propose un jeu, c'est que votre espérance mathématique est négative. L'exemple de la roulette est clair : en misant 100 F sur un numéro, vous gagnez 3 600 F (votre mise + 35 fois votre mise payée par le banquier) 1 fois sur 37, car les numéros vont de 0 à 36. En moyenne, vous dépensez 3 700 F pour en gagner 3 600, et votre espérance est donc de –100/37 F, soit –2,70 F. En moyenne, à chaque fois que vous jouez 100 F à la roulette, vous perdez donc 2,70 F (ce qui n'est peut-être pas très cher si cela vous amuse!).

Les deux lois de base du joueur éclairé semblent irréfutables et devraient donc dicter nos décisions en toutes circonstances. Nous allons voir que, dans certains cas, les règles fondées sur le calcul de l'espérance mathématique ne correspondent pas aux choix que nous jugeons bon de faire, ou même conduisent à des absurdités.

En cas d'inflation

Le premier exemple m'a été donné par Jacques Pitrat, qui est chercheur en intelligence artificielle à l'Université des Sciences de Paris : il nous fait soupçonner une difficulté. Lorsque l'inflation annuelle est supérieure à 1/37, soit 2,7 pour cent, et qu'il n'existe aucun moyen sûr d'obtenir une espérance moyenne de gain protégeant votre argent de l'inflation (c'était le cas en France il y a une quinzaine d'années, et c'est le cas dans tous les pays dont l'économie est en crise grave), les casinos constituent la moins mauvaise

2

Calculer et voter avec un jeu de cartes

Comparaison de salaires, calculs secrets, votes et cadeaux de Noël.

Pouvez-vous remplacer un dé par un jeu de cartes? Très facile : vous prenez six cartes, par exemple as, 2, 3, 4, 5 et 6 de cœur, vous en faites un paquet, vous le battez, vous retournez la carte du dessus, qui vous donne un numéro choisi au hasard entre 1 et 6 comme l'aurait fait un dé. En réalité, le mélange des cartes est inutile : l'opération de coupage du paquet, qui est plus facile, suffit.

Un jeu de cartes peut servir à bien d'autres choses, en particulier à traiter certains problèmes d'«oubli impossible», comme nous allons le montrer. Il peut ainsi remplacer un ordinateur, ce qui est intéressant, car un avantage rarement évoqué des ordinateurs est qu'ils permettent de mener secrètement des calculs, c'est-à-dire sans que nous ayons à prendre connaissance de données qui peuvent ensuite être effacées. Quand nous effectuons des calculs à la main, cela nous est impossible, car nous devons prendre connaissance de données, qu'ensuite nous ne savons pas oublier à volonté.

Cette faculté d'oubli à volonté est souvent essentielle. Les travaux récents que nous allons illustrer ici, menés par Claude Crépeau (de l'Université de Montréal) et Joe Kilian (du *Nec Research Institute*, dans le New Jersey) montrent qu'un jeu de cartes peut toujours remplacer l'ordinateur.

Qui gagne le plus?

Jacques et Édouard voudraient savoir qui gagne le plus, mais ils ne souhaitent pas dévoiler leurs salaires. Comment peuvent-ils s'y prendre? Si l'oubli à volonté était possible aux humains, il suffirait que Jacques et Édouard se communiquent le montant de leurs salaires, écrivent le nom de celui qui gagne le plus sur un papier, oublient l'information communiquée par l'autre, et lisent le papier. Avec un ordinateur, on traite aussi très facilement le problème : chacun entre secrètement la donnée de son salaire, l'ordinateur compare les deux valeurs, affiche à l'écran le nom de celui qui gagne le plus, et efface les données.

Comparer les salaires avec un jeu de cartes

Pour comparer les salaires avec des cartes, vous fixez une échelle de salaire en francs : *S(1)* = 6 000 F, *S(2)* = 9 000 F, *S(3)* = 12 000 F, *S(4)* = 15 000, par exemple. Jacques indique s'il gagne plus que *S(1)* en posant une carte face cachée sur la table : rouge pour non, noire pour oui. Édouard fait de même en posant une carte sur celle de Jacques. Cela constitue la première paire. Pour *S(2)*, Jacques et Édouard constituent de la même façon une seconde paire à côté de la première ; de même pour *S(3)* ; etc. Ils mélangent les quatre paires en les faisant glisser sur la table, mais en prenant garde de ne jamais défaire les paires et de ne jamais changer l'ordre des deux cartes d'une même paire : la carte du dessus doit rester au-dessus *(voir la figure 1)*. Ils retournent alors une paire choisie au hasard.

Quatre cas sont possibles. *(1)* Les deux cartes sont noires : rien ne peut en être déduit. *(2)* Les deux cartes sont rouges : rien ne peut en être déduit. *(3)* La carte du dessous est noire et celle du dessus est rouge : on en déduit que, pour une valeur de l'échelle, Jacques gagne plus que cette valeur et Édouard moins, donc Jacques gagne plus qu'Édouard. *(4)* La carte du dessous est rouge et celle du dessus noire : Édouard gagne

3

Parties infinies au jeu de la bataille*

Quelle est la probabilité de terminer avant le dîner cette partie de bataille commencée avec votre petit neveu?

On pourrait penser que les spécialistes de la théorie des jeux s'intéresseraient aux jeux les plus courants : il n'en est rien! Si tout le monde a joué une fois dans sa vie à la bataille, très peu d'études lui sont consacrées.

Même si le roi Charles VI y jouait, assure-t-on, des journées entières avec sa favorite Odette de Champdivers, le jeu de la bataille est en général considéré comme de peu d'intérêt. Les joueurs sont dans les mains du hasard et ne décident de rien. En revanche, les problèmes combinatoires posés par la bataille sont si difficiles que l'aide d'ordinateurs est nécessaire pour les traiter ; et encore, l'informatique est impuissante à les traiter tous. Ni les mathématiciens ni les informaticiens – à ma connaissance – ne disposent de techniques générales pour répondre avec certitude aux trois questions suivantes :
– Se peut-il qu'une partie de bataille soit infinie?
– Si oui, quelle est la proportion de parties infinies?
– Quelle est (quand on a exclu les parties infinies, s'il y en a) la durée moyenne d'une partie?

Le rangement des cartes gagnées

Les règles adoptées pour le jeu de la bataille sont souvent imprécises, en particulier celles concernant le rangement des cartes gagnées. Nous avons retenu les règles les plus simples et les plus naturelles.

On prend un jeu de $4N$ cartes, comportant quatre fois la carte '1', quatre fois la carte '2', ..., quatre fois la carte 'N'. La force d'une carte est déterminée par son numéro. Dans les variantes les plus classiques, N est égal à 8 (jeu de 32 cartes) ou N est égal à 13 (jeu de 52 cartes). Les cartes de numéros supérieurs à 10 portent d'autres noms, valet, dame, roi, mais il est équivalent de numéroter les cartes de 1 à N.

Les cartes sont distribuées en deux paquets égaux de $2N$ cartes. Chaque joueur tient son paquet dans une main, toutes les cartes rangées les unes sous les autres, les faces visibles vers le bas. Les joueurs n'ont jamais le droit de modifier l'ordre des cartes de leur paquet.

Pour jouer un pli, chaque joueur prend la carte au-dessus de son paquet et la pose sur la table face visible. Si les deux cartes posées sont de forces différentes, le joueur qui a mis la carte la plus forte gagne le pli. Si les deux cartes sont de même force, les joueurs s'écrient «bataille!», prennent une nouvelle carte au-dessus de leur paquet et la posent sur la table, face visible. Il existe une variante dite «bataille payante», où en cas de bataille chaque joueur ajoute une carte face cachée et une carte face visible, mais nous ne l'étudierons pas, car nous avons choisi de ne nous préoccuper que de la règle la plus simple. Quand les nouvelles cartes face visible sont de forces différentes, celui qui a mis la plus forte gagne le pli, sinon chaque joueur remet une nouvelle carte, etc.

Le joueur qui a gagné le pli remet les deux cartes qui viennent de s'affronter sous son paquet en commençant par la plus forte (la sienne, qui vient de gagner). Cette règle de rangement est naturelle, car le gagnant souhaite pouvoir réutiliser la meilleure carte le plus rapidement possible. Puis, s'il y a eu bataille, il place sous son paquet les deux cartes de la bataille ; si cette bataille était pré-

* Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Philippe Mathieu.

4

Le jeu explosif des commentaires itérés

Les 92 éléments du Big Bang numérique de John Horton Conway.

Aristote, le plus grand de tous les philosophes, méritait bien qu'on le commente, ce que fit Averroès (parmi bien d'autres) au XII^e^ siècle. Saint Thomas d'Aquin commenta ce commentaire (qu'il désapprouvait) et il fut lui-même commenté par Étienne Gilson qui lui-même... On trouverait mille autres exemples, en littérature ou en philosophie, de ces jeux infinis de commentaires, chacun s'appuyant sur le précédent *ad infinitum*.

Si le philosophe a toujours plus à dire que son prédécesseur, le mathématicien est plus économe de ses propos et ne profite pas de son commentaire pour étaler ses sentiments intimes sur le monde. Dans son *Dictionnaire des idées reçues*, Gustave Flaubert a soigneusement noté, en face du mot *mathématiques* : dessèchent le cœur.

1. L'ART DU COMMENTAIRE NUMÉRIQUE

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
13211311123113112211
11131221133112132113212221
3113112221232112111312211312113211

Partant du nombre 1, on le décrit. Cela donne «un "1"», c'est-à-dire 11. On décrit 11, cela donne «deux "1"», c'est-à-dire 21, ce qui se décrit «un "2", un "1"», c'est-à-dire 1211, etc. En poursuivant ainsi seuls les chiffres 1, 2 et 3 sont nécessaires.

Pourtant, nous allons voir que le jeu du commentaire mathématique engendre un monde remarquablement riche... en structures mathématiques.

Prenez un mathématicien (au cœur le plus sec possible) ; donnez-lui le texte numérique le plus élémentaire qu'il soit : «1» ; et demandez-lui son commentaire. Laconique, il répon-

5

Le Jeu de la vie, toujours vivant...

Depuis 25 ans, les biologistes du Jeu de la vie explorent une planète riche et étrange.

John Conway fixa les règles du *Jeu de la vie* il y a 25 ans et créa une science nouvelle. Depuis, les spécialistes ont poursuivi l'exploration d'un monde dont la définition tient en trois lignes, mais dont la richesse semble inépuisable. La discipline est à la croisée des chemins de la physique – on y construit des machines –, de la biologie – les êtres qu'on y étudie sont des cellules qui naissent et meurent –, des mathématiques – on y prouve parfois des théorèmes – et de l'informatique – les ordinateurs y jouent le rôle de microscopes. Ces dix dernières années, une bande de passionnés du jeu a beaucoup fait progresser la discipline.

Le monde du *Jeu de la vie* est un plan infini quadrillé dont chaque case est, soit occupée par une cellule, soit vide. Chaque case possède huit voisines et, d'une génération à l'autre, des naissances et des décès s'y succèdent mécaniquement selon la règle simplissime de Conway : si une case est vide et que trois de ses voisines sont occupées, alors une naissance s'y produit (étrange sexualité!) ; si une case est occupée, la survie n'y est possible que si deux ou trois cases voisines sont occupées ; dans tous les autres cas, la case se retrouve vide à la génération suivante. En résumé, naissance si 3 voisins, survie si 2 ou 3 voisins.

Ces règles, choisies parce qu'elles sont assez naturelles (la vie nécessite déjà de la vie, mais trop de vie provoque l'étouffement) et qu'elles engendrent un monde inattendu, ont dépassé toutes les espérances de son créateur. Toutefois les mathématiciens, qui savent traiter des problèmes d'une abstraction et d'une difficulté étourdissante, sont assez démunis pour résoudre la plupart des problèmes que pose cette biologie : lorsqu'ils les résolvent, c'est d'une façon peu satisfaisante, comme nous allons le voir. Cet incapacité laisse le champ ouvert aux étranges ingénieurs-biologistes à qui l'on doit les progrès récents que nous présentons.

Croissances infinies et croissances rapides

Après avoir constaté que certaines figures (configurations de cellules) sont stables, que d'autres sont périodiques (on en connaît des centaines maintenant), diverses questions se posent. La première est : une population de cellules peut-elle croître indéfiniment?

La réponse, positive, a été donnée dès 1970 par des étudiants du MIT ; cependant de nouvelles démonstrations plus simples de ce résultat sont disponibles et la figure 2 en indique deux tout à fait amusantes trouvées en 1992 et 1993 : l'*Extenseur* et le *Chasse-neige*. À chaque fois, ces configurations avancent en laissant derrière elles une traînée. Cette traînée, stable pour le *Chasse-neige*, est en mouvement périodique pour l'*Extenseur*. Si vous placez un obstacle sur le chemin de ces configurations, ne serait-ce qu'un bloc de quatre cellules formant un carré (c'est la configuration stable la plus simple), sa rencontre avec le *Chasse-neige* ou la tête de l'*Extenseur* détruira celui-ci, ainsi que toute la traînée qui s'embrase à toute vitesse, laissant, après s'être consumée, des débris éparpillés.

Le *Chasse-neige* ou l'*Extenseur* créent un nombre de cellules de plus en plus grand (s'il ne rencontre pas d'obstacles), mais le nombre de cellules vivantes n'augmente que proportionnellement au temps (on dit aussi «en *t*») et les cellules n'occupent qu'une petite partie de l'espace infini

6

Jeux, réussites et tours

Leurs riches structures permettent aux cartes Janus des combinaisons inattendues.

Pourquoi perdre une surface utile et ne pas imprimer les cartes à jouer des deux côtés? Pourquoi ne pas utiliser des jeux à double face? Aucune raison à cela sinon la tradition, dont on sait qu'elle peut être bousculée. Nous allons explorer les possibilités du jeu *Janus*, inventé en 1988 par Roland Yéléhada, qui permet des combinaisons amusantes et suggère plusieurs énigmes mathématiques.

La structure du jeu

Le jeu *Janus* comporte 32 cartes de deux types : 16 cartes *parallèles* et 16 cartes *complémentaires*. Les 16 cartes parallèles sont (on indique à chaque fois les deux faces, séparées par le symbole /) :

7♥/7♠, 8♥/8♠, 9♥/9♠, 10♥/10♠
V♥/V♠, D♥/D♠, R♥/R♠, A♥/A♠
7♦/7♣, 8♦/8♣, 9♦/9♣, 10♦/10♣
V♦/V♣, D♦/D♣, R♦/R♣, A♦/A♣

Le cœur et le pique qui se ressemblent – un pique n'est jamais qu'un cœur noir renversé avec une queue – sont associés et ce sont des couleurs parallèles. De même, le carreau et le trèfle sont aussi des couleurs parallèles.

Les 16 cartes complémentaires sont :

7♥/A♣, 8♥/R♣, 9♥/D♣, 10♥/V♣
V♥/10♣, D♥/9♣, R♥/8♣, A♥/7♣
7♦/A♠, 8♦/R♠, 9♦/D♠, 10♦/V♠
V♦/10♠, D♦/9♠, R♦/8♠, A♦/7♠

Derrière une face donnée, se trouve la face de hauteur complémentaire (le complément du 7 est l'as, celui du 8 est le roi, du 9 la dame, du 10 le valet) et de couleur complémentaire (le complément du cœur est le trèfle, et le complément du carreau est le pique).

Observons la structure de ce jeu, ce qui sera utile pour apprécier la suite :

- il y a 32 cartes, et donc 64 faces ;
- il y a deux 7♥, deux 8♥, etc. Chaque carte d'un jeu «habituel» de 32 cartes apparaît deux fois ;
- chaque carte a une face rouge et une face noire ;
- une carte sur deux comporte une face cœur (de même pour pique, carreau et trèfle) ;
- connaissant une seule face d'une carte, on ne peut pas savoir ce qu'il y a derrière, mais il n'y a que deux possibilités, selon que la carte est parallèle ou complémentaire. Si l'on voit un 10♥, l'autre face est soit un 10♠ (même hauteur et couleur parallèle) si la carte est parallèle, soit un V♣ (hauteur complémentaire et couleur complémentaire) si la carte est complémentaire.

Cette structure régulière permet de nombreuses combinaisons intéressantes et amène à faire des raisonnements de parités et de probabilités parfois simples et parfois... moins simples.

Pour disposer d'un jeu *Janus*, vous pouvez le fabriquer en quelques minutes à partir de deux jeux de 32 cartes et d'un peu colle ou de papier adhésif.

Le jeu des mariages parfaits

Commençons par un jeu auquel on peut jouer avec des enfants (à partir de 6 ou 7 ans) et qui renouvelle le fameux *jeu des mariages* (ou *poux chinois*, ou *memory*), car il demande ici des capacités de raisonnement plutôt que de mémorisation pour gagner.

Après avoir choisi qui commence (chacun prend une carte au hasard, et la plus forte désigne qui a la main), on mélange le jeu et l'on étale les 32 cartes sur la table. Parmi les 32 faces visibles (32 autres sont cachées), certaines associations parfaites sont possibles : par exemple,

7

Des jeux infinis aux grands ensembles

Des relations inattendues entre les jeux, les systèmes informatiques et la théorie axiomatique des ensembles conduisent aux grands cardinaux.

Le jeu commence avec un paquet de 20 jetons : chacun des deux joueurs, à tour de rôle, enlève un, deux, trois ou quatre jetons ; celui qui prend le dernier jeton gagne. Comment bien jouer? La stratégie gagnante consiste à laisser à l'adversaire un nombre de jetons multiple de 5. Comme celui qui commence a un tel nombre de pions devant lui, il est certain de perdre, si, bien sûr, le second joueur joue correctement, c'est-à-dire applique la stratégie indiquée.

Dans un tel jeu «fini, à information complète, sans partie nulle», une stratégie gagnante existe toujours : une façon de jouer assure à l'un des deux joueurs de gagner quoi que fasse l'autre. Il est, dans le cas des 20 jetons, facile d'établir une stratégie et de l'appliquer et il est également intéressant de savoir que, dans tous les cas, une telle stratégie existe : cela nous encourage à la chercher.

Pour les jeux «finis, à information complète avec parties nulles», comme le jeu d'échecs et le jeu de dames , mais pas le bridge ou le poker où l'information n'est pas parfaite, car on ne sait pas ce que sont les cartes des autres, soit il existe une stratégie gagnante pour l'un des joueurs, soit chaque joueur est certain de pouvoir au moins faire nul à chaque partie (si les deux joueurs jouent bien, toutes les parties sont nulles). Pour le jeu d'échecs ou les dames, ces stratégies optimales sont trop complexes pour être calculées effectivement, mais elles existent ; si quelqu'un réussit un jour à les expliciter, alors ce sera la mort de ces jeux, plus sûrement encore que si un ordinateur devient définitivement champion du monde.

Nous avons examiné des jeux finis, où le nombre de parties possibles est immense : dans le cas des échecs, ce nombre de parties possibles est supérieur au nombre d'électrons dans l'Univers visible. Aussi paradoxal que cela paraisse, la complexité de ces stratégies optimales finies est supérieure à celle des stratégies optimales pour certains jeux infinis. Ces jeux sont au cœur des derniers développements de la théorie des ensembles.

Nous avons tout le temps

Prenons un ensemble A de nombres réels, chacun compris entre 0 et 1. Par exemple : $A = \{0, 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...\}$. Le joueur I choisit un chiffre '0' ou '1' ; imaginons que c'est '1', et que ce joueur commence le développement binaire d'un nombre réel : 0,1. Le joueur II choisit un chiffre '0' ou '1' ; imaginons que c'est '0', et il le juxtapose aux chiffres précédents, ce qui donne : 0,10, etc.

Le but du joueur I est que le nombre obtenu en fin de partie (au bout d'un temps infini!) soit un élément de l'ensemble A, et le but du joueur II est que ce nombre ne soit pas un élément de A. Existe-t-il une façon de jouer, pour I ou pour II, qui assure le gain?

Solution : Le joueur II a une stratégie gagnante. Il joue '1' au début, puis '1' une fois sur deux, et '0' une fois sur deux. Voyons pourquoi il gagne avec cette stratégie. Une petite difficulté initiale ne nous arrêtera pas : il existe deux développements binaires de 1/2 : 0,1000... et 0,01111... (le second développement résulte du fait que la somme de la série 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ... est égale à 1/2). Similairement, les développements binaires de 1/4 sont 0,01000... et 0,0011111... Dans aucun de ces développements, on ne trouve

8

Les nombres-univers jouent aux combinaisons

Votre photographie est dans la suite des puissances de 2.

La Bibliothèque de Babel est peut-être la plus merveilleuse nouvelle de littérature fantastique jamais écrite : Jorge Luis Borges y émet l'hypothèse que le monde est une immense bibliothèque dont les salles de lecture contiennent tous les livres possibles de 420 pages. Chaque page comporte 40 lignes de 80 caractères pris dans un alphabet de 25 symboles : 22 lettres, le blanc, le point et la virgule (on serait plus à l'aise en acceptant, comme en informatique, 128 ou 256 caractères différents, mais c'est sans grande importance).

Les habitants de ce monde-bibliothèque sont conscients que le nombre total des ouvrages différents d'une telle bibliothèque est fini. Il y a $25^{420 \times 40 \times 80} = 25^{1344000} = 2{,}35 \times 10^{1878831}$ ouvrages distincts. Les habitants doivent donc se résoudre à admettre soit que la bibliothèque est elle-même finie (aucun livre n'étant présent deux fois), soit qu'elle est infinie, mais alors elle comporte plusieurs fois les mêmes ouvrages, peut-être répétés périodiquement (c'est la théorie soutenue par le narrateur).

Tentons d'imaginer ce que signifie cette idée d'une bibliothèque incluant tous les ouvrages possibles de 420 pages. Elle contiendrait le livre composé uniquement de la lettre A imprimée 1 344 000 fois, celui composé de la suite EFGHIJ indéfiniment recopiée (un autre n'en différerait qu'à la page 100 où le J disparaîtrait). Elle contiendrait aussi le texte du prochain prix Goncourt, le texte du prochain prix Goncourt dont la dernière page a été remplacée par une page blanche, une autre version encore avec chaque 'i' remplacé par 'y', une autre version avec votre nom comme nom d'auteur, une autre avec votre nom comme nom du personnage principal, les traductions italienne, bulgare, en vieux français, en latin primitif, etc. Cette bibliothèque contiendrait aussi un livre dont les pages paires porteraient le texte de l'Évangile, et les pages impaires de la *Justine* de Sade ; un livre qui serait *Fictions* de Borges (le recueil qui contient la nouvelle que nous examinons) écrit à l'envers, un autre qui serait *Fictions* comme je pourrais essayer de le reconstituer de mémoire si je m'y essayais ; un autre qui serait *Fictions* dont les mots auraient été classés par ordre alphabétique ; un autre qui serait Fictions sans la lettre 'e' résultant de l'exercice d'un Georges Pérec ressuscité. Il y aurait aussi, bien sûr, un livre qui énumérerait les décimales de π écrites en toutes lettres tout au long des 420 pages, mais malheureusement il y aurait aussi le même avec une erreur en page 200, et le même avec une erreur toutes les pages, et le même avec une erreur par ligne. Il y aurait aussi un livre qui raconterait votre vie, mais un autre la prolongerait de dix ans, et un autre la raccourcirait de 15 ans. J'arrête là, car la liste des possibilités est infinie... Non... Elle est finie, mais le fini très grand ne ressemble-t-il pas à l'infini?

On pourrait réécrire la nouvelle de Borges en imaginant une filmothèque où seraient entreposés tous les films possibles enregistrés sur des disques optiques numériques (chaque disque ne comporte qu'un nombre déterminé d'informations, et le nombre de disques différents est fini). Cette filmothèque universelle contiendrait quelque part le journal télévisé de demain soir, le film des derniers instants d'Hitler, l'enregistrement sur le vif des cours que donnait Aristote il y a 2 000 ans, un résumé en une heure des 50 prochaines années de la vie sur Terre, mais aussi une multitude de films fallacieux, mal montés, incohérents, indéchiffrables, parasités ou presque entièrement noirs.

9

Le jeu agité de la coopération*

Des mouvements oscillatoires inattendus aident à comprendre pourquoi nous ne sommes pas tous débonnaires.

La simulation des comportements sociaux sur ordinateur montre que, là où tout ne semblait qu'«ordre, calme et volupté», le diable a introduit un maléfice qui ferait douter de ses choix le plus saint des hommes.

Nos recherches systématiques utilisent des ordinateurs puissants qui ont calculé pendant des journées entières ; elles ont montré que les comportements sociaux présentent des aspects oscillatoires inattendus. Ces expériences jettent un doute sur les conclusions généralement admises concernant l'intérêt de la coopération entre entités jouant au «dilemme des prisonniers».

Ce jeu, dont nous indiquerons les règles plus loin, est un modèle naturel pour étudier les mécanismes de coopération entre organismes indépendants ; ceux-ci doivent choisir entre une attitude d'association ou une attitude d'opposition. Aussi les conclusions morales que l'on déduisait des résultats anciens doivent prendre en compte des dynamiques nouvelles que nous avons rencontrées.

S'associer ou se combattre?

Deux suspects emprisonnés sont questionnés par la police. Ils s'interrogent : doivent-ils être solidaires l'un de l'autre en n'avouant rien aux policiers ou doivent-ils trahir leur compère pour bénéficier d'une remise de peine? C'est le dilemme des prisonniers. Pour en illustrer la généralité, examinons le cas économique du travail spécialisé.

Vous êtes meilleur sabotier que votre voisin, lequel est meilleur cultivateur que vous ; votre intérêt commun est de vous spécialiser et de créer une association. Vous resterez dans votre atelier et lui dans son champ, et vous échangerez des sabots contre du blé. Globalement, vous gagnerez chacun, en coopérant ainsi, plus que si vous refusiez de commercer l'un avec l'autre. Pourquoi? Parce que, si vous ne coopériez pas, vous seriez obligé de passer une partie de votre temps à faire des sabots et une autre partie à cultiver votre blé, tâche où vous êtes inefficace. Vous pourriez être tenté d'aller voler le blé de votre voisin! Est-ce une bonne politique? Vous en tirez un bénéfice immédiat, mais vous risquez alors de vous fâchez définitivement avec lui. Toute coopération future est alors interdite, et vous perdez le bénéfice des échanges. Il en va de même si votre voisin vole vos sabots.

Ce type de situations apparaît dans un grand nombre de contextes : en économie, en biologie, en sciences politiques, en psychologie, en sociologie, en stratégie militaire, en informatique, etc. Dans ces situations, chaque joueur a le choix entre la coopération – c – et la trahison – t – (le vol des biens du voisin amenant la dispute) ; l'intérêt commun est la coopération, alors que l'intérêt individuel est la trahison (le voleur gagne plus). Les gains des entités dans un tel jeu sont fonction de leurs choix. Indiquons les paramètres, classiques mais adaptables, du dilemme des prisonniers.

Si les deux entités coopèrent – ce que l'on note $[c,c]$ –, toutes deux gagnent journellement trois points, et la «production quotidienne» globale est de six points.

* Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Philippe Mathieu.

10

Les jeux de l'information noyée

La dissimulation d'un message dans un autre – la stéganographie – est un art ancien et multiforme : Internet le ressuscite.

Pour préserver le secret d'un message, on en code le contenu : celui qui trouve le message ne peut, en principe, rien en tirer. Cependant le seul fait de savoir qu'il y a quelque chose de caché attise la curiosité, défie l'intelligence du lecteur, qui parvient parfois à le déchiffrer. L'histoire des services secrets regorge de tels cas.

Une idée ancienne, meilleure que le codage, est la stéganographie. Ce mot – ignoré de la plupart des dictionnaires – désigne l'art de dissimuler un message secret dans un message anodin. Ce dernier, parce qu'il n'attire pas l'attention, est plus impénétrable que la plus astucieuse des méthodes de cryptographie : ne voyant pas et ne sachant pas qu'il y a quelque chose de caché, le policier ou l'espion laisse passer le message apparemment banal. L'internet a ressuscité cet art de noyer l'information pour la masquer.

La stéganographie apparaît dès l'Antiquité. Ainsi Hérodote raconte qu'Histiée envoya à Aristagoras de Millet un esclave porteur d'un message sans importance, puis plus tard l'indication qu'il fallait le raser. Sur le crâne tatoué de l'esclave apparut alors le message indiquant que l'heure était venue de la révolte contre les Perses. Cette méthode ne s'applique pas aux cas d'urgence : plusieurs mois sont nécessaires entre le moment où l'on écrit le message sur le crâne tondu et celui où le porteur du message, dont les cheveux ont repoussé, peut être envoyé à travers les lignes ennemies.

L'encre sympathique est la plus connue des méthodes de stéganographie : vous écrivez votre message secret sur une feuille avec une encre invisible (par exemple, du jus de citron) que seul un traitement particulier fait apparaître (par exemple, la flamme d'une bougie) ; puis vous écrivez un message innocent sur la même feuille, que vous faites parvenir à votre correspondant. Les Allemands, pendant la dernière guerre mondiale, utilisèrent une variante de ce procédé : ils cochaient les lettres d'un journal avec une encre invisible (spécifique, elle ne réagissait qu'à un produit particulier).

La lettre de George Sand

Je suis très émue de vous dire que j'ai
bien compris, l'autre jour, que vous avez
toujours une envie folle de me faire
danser. Je garde un souvenir de votre
baiser et je voudrais que ce soit
là une preuve que je puisse être aimée
par vous. Je suis prête à vous montrer mon
affection toute désintéressée et sans cal-
cul. Si vous voulez me voir ainsi
dévoiler, sans aucun artifice, mon âme
toute nue, daignez donc me faire une visite.
Et nous causerons en amis et en chemin.
Je vous prouverai que je suis la femme
sincère, capable de vous offrir l'affection
la plus profonde et la plus étroite
amitié, en un mot, la meilleure amie
que vous puissiez rêver. Puisque votre
âme est libre, alors que l'abandon où je
vis est bien long, bien dur, et bien souvent
pénible, ami très cher, j'ai le cœur
gros, accourez vite et venez me le
faire oublier. À l'amour, je veux me sou-
mettre.

B.N.F.

1. Un texte peut en cacher un autre. Cette lettre de George Sand en illustre la possibilité. La gymnastique qu'implique la réussite d'un tel exercice demande, bien sûr, des dispositions favorables.

11

Le joueur mélange les cartes

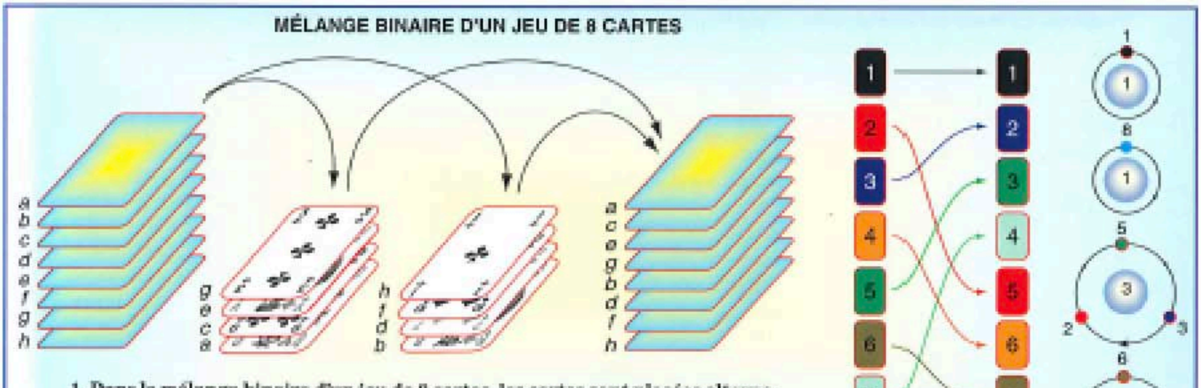
Le difficile passage de l'ordre au désordre, ou les illusions du mélange.

Avec des cartes, on peut jouer à plusieurs (belote, bridge, poker, etc.), faire des patiences, réaliser des tours de magie ou faire semblant d'y déchiffrer l'avenir. On peut aussi manipuler les cartes pour le simple plaisir de découvrir des structures mathématiques. On expérimente ainsi très concrètement les notions d'ordre et de désordre : l'ordre, c'est un paquet classé, le désordre, c'est un paquet battu. Le passage du premier état au second s'appelle le mélange, moins simple à pratiquer qu'on ne le pense.

Retour au départ

Pour bien mélanger – croit-on –, il suffit de faire n'importe quoi avec application et assez longtemps! Erreur : un théorème de théorie des groupes indique qu'il ne faut pas trop s'appliquer. Ce théorème énonce que «tout élément d'un groupe fini possède une puissance qui est l'identité». Appliqué aux opérations de mélange d'un jeu de cartes, qui forment un groupe fini, le théorème indique que si vous effectuez de manière répétée le même mélange, vous reviendrez toujours à votre point de départ, c'est-à-dire à l'ordre initial du paquet. Le nombre de fois qu'il faut appliquer l'opération de mélange pour revenir au paquet initial est la période de l'opération.

L'opération d'inversion d'un paquet (la première carte devient la dernière, la seconde l'avant-dernière, etc.) a une période 2 : si vous inversez deux fois un paquet, vous revenez bien sûr à votre point de départ. Ce retour, le théorème l'affirme, n'est pas exceptionnel mais général.



1. Dans le mélange binaire d'un jeu de 8 cartes, les cartes sont placées alternativement dans deux paquets qui sont ensuite réunis. La décomposition en cycles, représentée à droite, indique que le plus petit commun multiple des longueurs de cycle est égal à 3 : après trois répétitions de l'opération, on revient à l'ordre initial des cartes. La période de la séparation binaire est égale à 3.

12

Le jeu du vote et ses paradoxes

Manipulation d'informations confidentielles lors des opérations de vote.

Condorcet, illustre encyclopédiste et démocrate convaincu du *Siècle des lumières*, a montré qu'à des élections à la majorité simple, A peut battre B (dans un vote opposant A à B), B peut battre C (dans un vote opposant B à C) et C peut battre A (dans un vote opposant A à C). La situation la plus simple créant ce paradoxe ne fait intervenir que trois électeurs, le premier ayant pour ordre de préférence $A\ B\ C$, le second $B\ C\ A$ et le troisième $C\ A\ B$. Comment être juste en matière électorale? s'interrogeait Condorcet.

Notre intuition d'électeur est souvent mise en défaut. Certains paradoxes naissent de l'arithmétique des systèmes de votes, que nous maîtrisons mal. D'autres font intervenir la manipulation d'informations confidentielles qui autorise des opérations imprévues ou même à première vue impossibles. Les trois exemples qui suivent illustrent les difficultés de la démocratie : pour vous donner la possibilité de jouer, nous les présentons sous forme d'énigmes.

1. À un logicien rien d'impossible

Une assemblée composée d'un nombre impair de logiciens a été capturée par le *grand méchant logicien* qui veut les enrôler dans sa secte. Il leur laisse une chance d'échapper à l'embrigadement. Il dessine dans le dos de chacun d'eux une croix noire ou une croix rouge en procédant au hasard (il s'aide d'une pièce de monnaie qu'il jette en cachette). Chaque logicien voit les croix dessinées sur le dos des autres logiciens, mais ne voit pas celle qu'il porte. Aucune communication n'est permise entre les logiciens. Un scrutin est organisé, et chaque logicien vote pour indiquer s'il pense qu'il y a un nombre pair de croix rouges au total, ou un nombre impair de croix rouges au total. L'abstention n'est évidemment pas permise.

Le *grand méchant logicien* comptabilise les réponses et considère la réponse majoritaire (il y en a une, puisque le nombre de logiciens capturés est impair). Si le vote majoritaire est correct, les logiciens sont libérés et peuvent aller s'amuser à traiter toutes les énigmes et paradoxes qu'ils trouvent intéressants ; sinon, ils sont condamnés à servir d'esclaves au *grand méchant logicien*, qui les oblige à trouver des applications à la «logique planaire» inventée par lui et qu'il considère comme la trouvaille du siècle.

Chaque logicien se dit : «Puisque la parité du nombre total de croix rouges dépend de celle que j'ai dans le dos, qui a été tirée au hasard, je ne peux rien faire de mieux que voter au hasard. Il en est de même de tous les autres logiciens, et donc globalement nous ne pouvons rien espérer de mieux qu'être libérés une fois sur deux.»

Aussi étonnant que cela paraisse, il existe une méthode de vote que les logiciens peuvent deviner et appliquer et qui leur permettra d'être libérés dans bien plus de la moitié des cas. Quelle est cette méthode?

Solution

Imaginons que tous les logiciens adoptent la règle suivante :

«Je suppose que j'ai dans le dos une croix de la couleur majoritairement présente devant moi et je vote conformément à la parité de ce décompte. Si je vois sur le dos des autres logiciens autant de croix noires que de croix rouges, je vote sur la parité en faisant l'hypothèse que j'ai dans le dos une croix rouge.»

13

Jeu du voyageur et baguenaudiers

Le code de Gros-Gray est utile aux choses sérieuses et futiles.

Les physiciens s'interrogent : l'espace n'aurait-il pas plus de trois dimensions? La relativité, en prenant en compte le temps, soutient qu'il n'y en a pas moins de quatre, et des théoriciens plus téméraires, armés d'arguments qui échappent au vulgaire, envisagent que nous vivions dans un espace à huit dimensions, voire onze.

Il devient donc urgent de résoudre le problème du voyageur de commerce en dimension n : des points étant donnés dans un espace de dimension n, comment organiser le plus court trajet qui passe par tous les points? En suivant l'illustre exemple du mathématicien à qui l'on demandait de calculer le volume d'une vache et qui commençait son raisonnement par «supposons que la vache soit sphérique...», nous nous limiterons au cas des sommets d'un parallélépipède rectangle : quel est le plus court chemin qui passe par tous les sommets d'un tel parallélépipède à n dimensions?

Un rectangle a quatre sommets. Un parallélépipède, 8, et, plus généralement, un parallélépipède à n dimensions en possède 2^n. Nous noterons ces sommets 00...00, 00...01, 00...10, ..., 11...1 (toutes les suites finies de n symboles «0» ou «1»).

Les longueurs des côtés du parallélépipède sont classées de la plus grande à la plus petite. Le problème est maintenant parfaitement bien posé. En imposant de partir du sommet 00....0 (ce qui n'enlève aucune généralité au problème), celui-ci n'admet qu'une seule solution.

La solution est donnée par une suite de sommets qui constituent ce qu'on appelle le code de Gros-Gray, dont le nom provient de Louis Gros et de Frank Gray. Gros était clerc de notaire à Lyon ; il publia en 1872 un opuscule où ce code était présenté pour la première fois en lien avec un casse-tête sur lequel nous reviendrons. Gray travaillait aux Laboratoires *Bell*, il réinventa ce code, et en livra une étude détaillée dans les années 1930 ; il se voit parfois injustement attribuée la paternité exclusive de l'invention.

On sait prouver que le code de Gros-Gray donne le plus court trajet du voyageur de commerce sur le parallélépipède rectangle : ce trajet est représenté sur la figure 2. Le principe de déplacement du voyageur n'est complexe qu'au premier abord : examiné attentivement, il exhibe des régularités fascinantes sur lesquelles nous allons nous attarder.

Des zéros et des Huns

À chaque entier n, nous associons sa notation en binaire $b(n)$ et son code de Gros-Gray que nous noterons $g(n)$. Voici quelques exemples :

$b(0) = 0$	$g(0) = 0$
$b(1) = 1$	$g(1) = 1$
$b(2) = 10$	$g(2) = 11$
$b(3) = 11$	$g(3) = 10$
$b(4) = 100$	$g(4) = 110$
$b(5) = 101$	$g(5) = 111$
$b(6) = 110$	$g(6) = 101$
$b(7) = 111$	$g(7) = 100$

Un tableau plus complet se trouve sur la figure 1. La suite des codes de Gros-Gray peut être définie de bien des façons dont on prouve, avec un peu de patience qu'elles sont équivalentes ; chacune de ces caractérisations sera utile.

La première définition indique comment passer d'un code de Gros-Gray au suivant : on change un seul chiffre (1 en 0 ou 0 en 1), qui est :

– le dernier si le nombre de «1» est pair,
– celui à gauche du «1» le plus à droite, sinon.

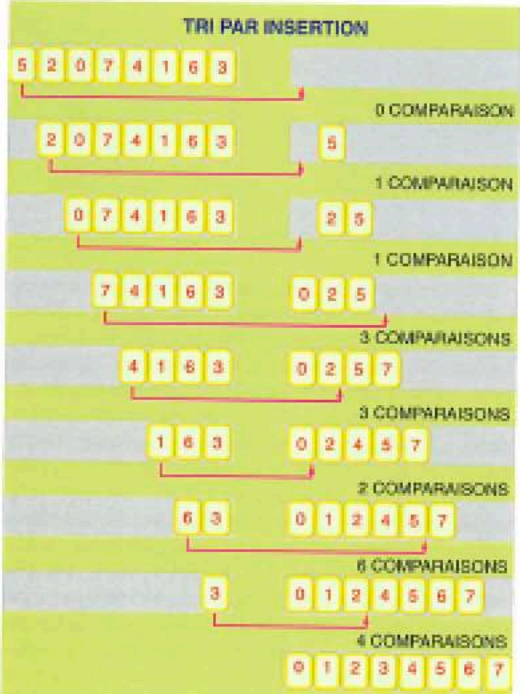
14

L'art de ranger un jeu

La loi du moindre effort dans les méthodes de tri de données ou de cartes.

Pour vérifier qu'un jeu est complet ou identifier les cartes absentes, pour préparer certains tours de prestidigitation ou un tournoi de bridge, il faut trier les cartes. Les problèmes posés par ces tris ressemblent à ceux que doivent traiter les informaticiens pour classer des données. Pour les résoudre, une science inattendue de l'économie des gestes et du travail a été mise en œuvre.

Les mathématiciens ont compris il y a 40 ans que trier n'était pas si simple et, depuis, ils ont étudié comment préserver le précieux temps de calcul des ordinateurs. Parmi des dizaines de méthodes proposées, certains algorithmes remarquables de tri informatique s'adaptent au classement des cartes et illustrent que le plus rapide n'est pas le plus simple. Mais, comme on le verra aussi, le classement des cartes a ses propres subtilités.



1. Le tri par insertion est naturel et simple à programmer. Malheureusement, ce n'est pas un tri efficace, car, pour trier n données, il lui faut en moyenne effectuer $n^2/4$ comparaisons.

Le tri par insertion

Le tri par insertion est sans doute le plus naturel de tous les tris à la main, et c'est d'ailleurs celui que la plupart des gens utilisent pour classer leurs cartes quand ils ramassent leur main au bridge ou quand ils doivent trier alphabétiquement des noms, des fiches, ou des livres.

L'algorithme de tri par insertion est le suivant : on prend les cartes une à une, et l'on compose un nouveau paquet en plaçant chaque carte qu'on introduit à la place qu'elle doit avoir parmi celles qui sont déjà placées. À chaque instant du tri par insertion, une partie du paquet est parfaitement classée et l'autre encore désordonnée.

On mesure la complexité d'un tri en comptant le nombre de comparaisons entre deux cartes (ou deux nombres s'il s'agit de nombres) qu'on doit faire pour classer l'ensemble. Plus ce nombre est grand, moins bon est le tri ; plus il est petit, meilleur il est.

Étudions ce qui se passe pour le tri par insertion. Quand on place la première carte, on n'effec-

15

Images brouillées, images retrouvées*

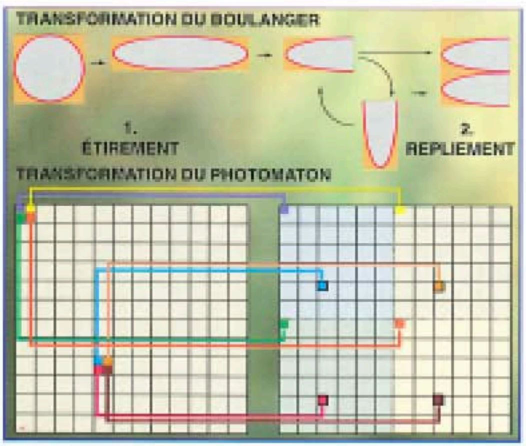
La transformation du boulanger, du photomaton, et les charmes de l'arithmétique pour expliquer ces jeux graphiques.

Le boulanger prend la pâte, l'étire, la replie, puis recommence. C'est la «transformation du boulanger» que les spécialistes du chaos utilisent depuis 20 ans pour expliquer les subtiles interactions entre l'ordre et la complexité, entre le déterminisme et le hasard. Par cette transformation, croit notre boulanger, les particules de pâte se mélangent, et sa pâte s'homogénéise. Est-ce certain?

Notre projet ici sera modeste et ludique : nous allons utiliser la métaphore pâtissière pour maltraiter des images et observer quelques phénomènes étranges. La transformation du boulanger et celle que nous appellerons *la transformation du photomaton* nous feront assister en direct au brouillage progressif d'une image et à son «débrouillage» inattendu.

Un logiciel pour *Windows 95* réalisé à l'occasion de cet article est disponible. Les lecteurs pourront soit le demander à l'éditeur (envoyer une disquette et une enveloppe timbrée pour le retour), soit le télécharger à partir du site Internet : http://www.lifl.fr/~mathieu/transform.

Le site contient des illustrations complémentaires et propose d'autres transformations avec lesquelles vous pourrez expérimenter en suivant les indications données dans cet article.



1. Le déplacement des points dans les transformations du boulanger et du photomaton.

* Ce chapitre a été écrit en collaboration avec Philippe Mathieu

Les mélanges bijectifs de pixels

Une image d'ordinateur est composée d'un nombre fini de points appelés pixels, qu'il est possible de traiter individuellement et donc de mélanger comme on mélange des cartes à jouer (nous reviendrons sur ce parallèle).

Les mélanges de points les plus intéressants sont les mélanges bijectifs (appelés aussi permutations) : chaque point d'une image est envoyé à la place d'un autre point dans la transformée, et aucun point n'est perdu. Après un mélange bijectif, l'image est toujours présente (puisqu'aucun point n'a été effacé), mais elle est mélangée et parfois méconnaissable.

Le mélange bijectif ayant été effectué, on peut l'appliquer une deuxième fois, puis une troisième, etc. On obtient ainsi une série d'images complètes, mais où l'on éprouve des difficultés – en général croissantes – à reconnaître l'image de départ.

Avec des images composées d'un nombre fini de pixels (c'est toujours le cas en informatique),

16

Le jeu géométrique des preuves sans mots

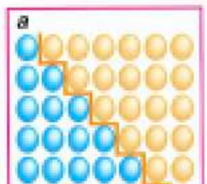
En mathématiques, un petit dessin vaut-il mieux qu'un long discours?

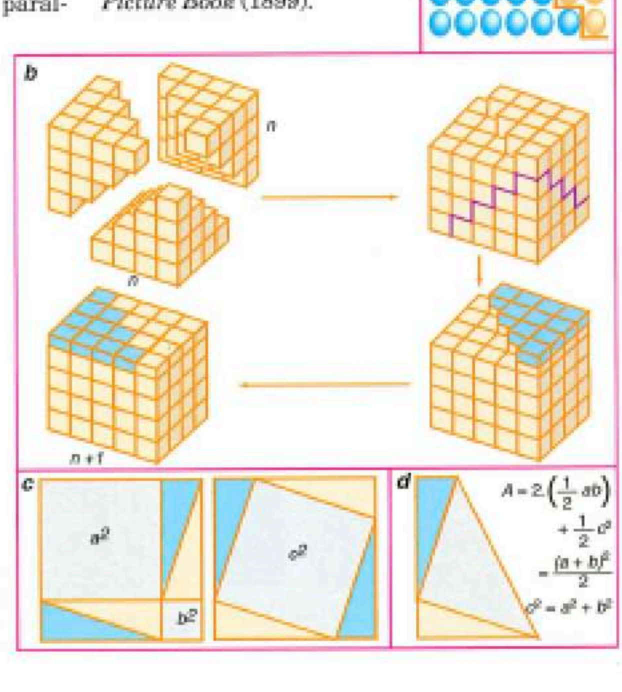
Il y a quelques années, il était bien vu de mettre le moins possible de dessins dans un livre de géométrie. On trouve encore en vente des ouvrages de géométrie dont certains chapitres ne comportent absolument aucune figure : j'en ai un chez moi, paru en 1967, dont le chapitre sur les barycentres ne contient aucun triangle, aucun segment, ni aucune illustration d'aucune sorte!

Le grand traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki ne possède pas de tome consacré exclusivement à la géométrie, mais inclut quand même un livre d'algèbre de plus de 500 pages qui traite de droites, de plans, d'espaces, de parallèles, de parallélogrammes, de symétries, d'homothéties, de projections, de quadrilatères, du théorème fondamental de la géométrie projective, du théorème de Pappus, du théorème de Desargues, etc. Pas une figure!

L'idée derrière ce qui semble de navrantes aberrations est qu'une figure ne prouve rien et qu'au contraire, il faut s'en méfier, car elle n'est jamais *quelconque* : quand vous dessinez un triangle, il possède peut-être une caractéristique particulière qui vous donne l'illusion d'un résultat général erroné. Le raisonnement, même quand il concerne des objets géométriques, ne doit pas s'appuyer sur ce qu'on voit : en mathématiques, méfions-nous des sens!

Plusieurs raisonnements géométriques apparemment irréprochables conduisent à des paradoxes. L'erreur provient le plus souvent de la figure dont on s'aide pour le raisonnement, qui est imperceptiblement trompeuse et nous conduit dans un piège. L'un de ces raisonnements établit que «tout triangle est isocèle» *(voir la figure 5)*. Il fut inventé par Lewis Carroll, qui le présenta dans son ouvrage *The Lewis Carroll Picture Book* (1899).





1. *(a)* : Preuve de $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$. *(b)* : Preuve de $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = 1/3[n(n + 1)(n + 1/2)]$. Preuve due à Man-Keung Siu (1984). *(c)* et *(d)* : deux démonstrations du théorème de Pythagore. La première est due à un auteur inconnu qui vivait en Chine, vers –200 avant J.-C. La seconde est l'œuvre du vingtième président des États-Unis, James Garfield.

17

Les fractions jouent avec les chiffres

Divisez, divisez, il en restera toujours quelque chose.

Les fractions nous sont familières? Erreur : nous les connaissons mal. Nous savons les simplifier 100/500 = 10/50 = 1/5, 12/18 = 6/9 = 2/3 (si le numérateur et le dénominateur sont divisibles par un même nombre entier, il faut effectuer la division, et cela jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de facteurs communs, excepté 1).

Nous savons faire des divisions 1/5 = 0,2 et 2/3 = 0,666666... Là commencent les ennuis : la division ne tombe pas toujours juste, ce qui conduit à des suites infinies de décimales qu'on ne peut pas écrire toutes!

Cela est fort intéressant et peut nous entraîner très loin, y compris dans des problèmes encore non résolus. Commençons par les fractions au développement décimal fini. Quelles sont-elles?

Votre expérience vous l'a peut-être déjà fait deviner : les fractions ayant un développement décimal fini sont celles dont (une fois simplifiées) le dénominateur est un produit de 2 et/ou de 5, autrement dit de la forme $2^i 5^j$. Les fractions 9/16 = 0,5625, 17/250 = 0,068, 230/1250 = 0,184 ont une écriture décimale finie, car 16 = 2 × 2 × 2 × 2 250 = 2 × 5 × 5 × 5, 1250 = 2 × 5 × 5 × 5 × 5.

Les nombres qui ont une écriture décimale finie sont bien sûr ceux qui, lorsqu'on les multiplie par une puissance de 10 assez grande, donnent des entiers : 0,23432 multiplié par 10^5 donne 23 432.

Pour cela, il faut que le dénominateur soit composé uniquement de diviseurs de 10, c'est-à-dire un produit de 2 et de 5. Une fraction s'écrit de manière finie en base 10 si, après simplification, le dénominateur est de la forme $2^i 5^j$. Le nombre exact de décimales est le plus grand des deux entiers i et j. Si le dénominateur contient un autre facteur, alors l'écriture décimale est infinie :

5/12 = 0,41666666..., 3/11 = 0,272727... 2/9 = 0,222222... etc.

Et dans une autre base de numération? Une fraction simplifiée s'écrit de manière finie en base B si et seulement si tout facteur premier du dénominateur est aussi un facteur premier de la base B. Par exemple, 2/5 en base 3, s'écrit : 0,101210210210210... Le développement est infini, car 5 n'est pas un facteur premier de 3. En base 9, 16/27 s'écrit : 0,53. C'est fini, car 27 n'a qu'un facteur premier : 3, qui est aussi un facteur premier de 9.

Des rappels d'arithmétique sont proposés dans la figure 1, et la méthode pour écrire un nombre entier ou réel en base B est expliquée à la figure 2.

Les développements infinis que nous avons écrits nous ont montré que l'écriture des fractions, lorsqu'elle n'était pas finie, était répétitive. Quelle est la période de cette répétition?

Faisons quelques tests :

7/33 = 0,212121212121212121...

7/13 = 0,538461538461538461... (538461 se répète toujours).

Le phénomène n'est pas propre à la base 10. En base 3 : 1/2 = 0,111111..., 1/5 = 0,012101210121... : toutes les fractions ont un développement en base 10 (ou autres) qui finit par se répéter, et réciproquement, si un nombre est périodique dans une base, c'est un rapport de deux entiers (et il est donc périodique dans toute base).

Les nombres périodiques

Les nombres ayant un développement fini peuvent être vus comme des nombres ayant un développement périodique de période de longueur nulle. Nous adopterons ce point de vue quand nous parlerons de nombres périodiques. Nous adopterons aussi la notation 12,35[47]

18

La conjecture de Syracuse

Le plus simple des problèmes mathématiques non résolus illustre la démarche des chercheurs.

Les sciences résolvent les questions élémentaires, puis passent à d'autres plus compliquées, progressant petit à petit. Le pédagogue défend aussi cette idée d'apprentissage graduel : «L'ontogenèse de l'apprentissage suit la phylogenèse des découvertes», pense-t-il : l'élève traite les cas simples et anciens, puis lentement passe aux cas difficiles.

Hélas, le monde mathématique ne se plie pas à cette vision d'une armée de chercheurs laborieux avançant selon un plan fixé sur un front de difficultés : il est des passages étroits où l'on ne peut maintenir l'allure. Pire, la plaine est semée de murailles invisibles dont on ne découvre l'existence qu'en s'y cognant.

La *conjecture de Syracuse* est une de ces murailles sur laquelle la communauté mathématique a buté (avec amusement d'abord, avec agacement ensuite) et, pour l'instant, aucun alpiniste n'a su la gravir. Le problème est de formulation si simple qu'il semble étonnant que personne n'ait pu le résoudre : quand vous aurez lu cet article, vous serez au même point que les plus grands mathématiciens, ce qui n'est pas une piètre satisfaction.

Détaillons la règle du jeu. Prenez un entier, n ; s'il est pair, vous le divisez par 2, s'il est impair, vous le multipliez par 3 et vous ajoutez 1. Vous recommencez cette opération avec le résultat obtenu. Prenons un exemple : partant de 10, vous passez à 5, puis à 16 ($3 \times 5 + 1$), puis à 8, puis à 4, puis à 2, puis à 1, qui vous ramène à 4, 2, 1, cycle dans lequel vous restez alors tout le temps. Au bout du compte, on retombe sur 1. Deux entiers peuvent donner le même résultat (par exemple, 32 et 5 donnent 16, leurs cheminements se rejoignant), ce qui suggère de représenter les divers parcours sous la forme de graphes ou de tableaux.

Essayez d'autres valeurs au hasard, en vous aidant d'un ordinateur si vous voulez. *Vous tomberez toujours sur 1.* Cette affirmation péremptoire est injustifiée : personne n'a montré qu'on arrive toujours à 1 (d'où le nom de «conjecture de Syracuse» pour cette affirmation). On a essayé tous les nombres jusqu'à $3{,}2\ 10^{16}$, et tous aboutissent à 1.

Troubles dans les esprits

Cette conjecture dont l'origine, vers 1950, reste confuse porte une grande variété d'autres noms provenant de mathématiciens l'ayant étudiée ou fait connaître : problème de Collatz, problème de Kakutani, problème de l'algorithme de Hasse, problème d'Ulam. Le nom de conjecture de Syracuse est lié à l'Université de Syracuse, aux États-Unis, où le problème fut étudié. Le nom le plus souvent retenu aujourd'hui est plus simplement celui de «problème $3x + 1$».

S. Kakutani fit circuler le problème et raconte : «Pendant un mois, tout le monde à l'Université de Yale travailla dessus, sans résultat. Un phénomène semblable se produisit à l'Université de Chicago. Cette énigme, pensaient certains, avait été avancée par le KGB pour ralentir la recherche mathématique aux États-Unis.»

La conjecture de Syracuse a donné lieu à des publications rattachées au domaine de la théorie des nombres. Ces travaux ont pris une tournure très sérieuse, conduisant à certains résultats que nous allons examiner. Cependant, on ne sait toujours pas répondre à la question : «Arrive-t-on toujours sur 1?»

19

Les conquêtes des polyminos

Dans certains domaines mathématiques comme les polyminos, amateurs et informaticiens éclairés font avancer les connaissances.

Le domino est composé de deux carrés accolés par un côté. Les polyminos (parfois appelés polyominos) qui en réunissent 3 sont dénommés triminos ; 4, quadriminos ; 5, pentaminos ; 6, hexaminos ; 7, heptaminos.

Depuis que Solomon Golomb les a présentés au monde scientifique, en 1953, lors d'une conférence au Club mathématique d'Harvard, et que Martin Gardner en 1957, dans un de ses premiers articles de récréation mathématique de *Scientific American*, en a fait la publicité, une «culture du polymino» s'est développée, donnant lieu à des centaines d'articles, à une multitude de jeux et de casse-tête, et un grand nombre de sites Internet leur sont consacrés. Des artistes comme Guenter Albrecht-Buehler les utilisent dans leurs œuvres. Ce peintre expose ses tableaux, comme celui ci-dessus, à l'adresse :
http://pubweb.acns.nwu.edu/~gbuehler/

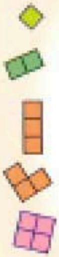
Dans l'introduction de son livre entièrement dédié aux résultats des recherches sur les polyminos et dont une édition augmentée a été publiée il y a peu, S. Golomb explique : «Après la conférence de 1953, je me suis trouvé irrévocablement lié à tout ce qui pouvait leur arriver. Un flot continu et soutenu de correspondants du monde entier et de toutes les strates de la société – présidents d'Université, pensionnaires d'obscurs monastères ou de célèbres pénitenciers, etc. – m'ont demandé des informations, proposé de nouveaux problèmes ou fourni des nouvelles solutions.»

Même s'il existe des traces de ces remarquables figures géométriques dans un livre, publié en 1907, d'Henry Ernest Dudeney, le célèbre créateur de jeux mathématiques anglais, même si, quelques siècles plus tôt, un maître du jeu de go remarqua qu'on pouvait créer 12 formes différentes composées de 5 carrés accolés par un côté au moins (pentaminos), ce n'est que depuis la fameuse conférence qu'on les a considérés avec quelque sérieux.

Dans une version initiale du film *2001, l'Odyssée de l'espace*, de Stanley Kubrick, une scène mettait en lice un acteur qui jouait aux pentaminos avec l'ordinateur (cette scène fut remplacée au dernier moment par une partie d'échecs).

1. DÉNOMBREMENTS

Aucune méthode générale ne permet de déterminer le nombre de polyminos composés de n carrés. Dans ces dénombrements, on considère bien sûr comme identiques deux polyminos obtenus par retournement ou rotation. Les nombres de polyminos connus aujourd'hui ont été calculés par dénombrements exhaustifs à l'aide de programmes :



n	Nombre $P(n)$ de polyminos à n carrés	n	Nombre $P(n)$ de polyminos à n carrés
1	1	13	238591
2	1	14	901971
3	2	15	3426576
4	5	16	13079255
5	12	17	50107909
6	35	18	192622052
7	108	19	742624232
8	369	20	2870671950
9	1285	21	11123060678
10	4655	22	43191857688
11	17073	23	168047007728
12	63600	24	654999700403

David Klarner a démontré qu'il existe une constante telle que $P(n) \sim n^k$ à l'infini. Cette constante de Klarner est très mal connue aujourd'hui, on sait seulement qu'elle est comprise entre 3,72 (D. Klarner, W. Satterfield) et 4,65 (D. Klarner, R. Rivest) : $n^{3,72} < P(n) < n^{4,65}$.

20

Les martingales et autres illusions

Au casino, on peut gagner presque certainement... en risquant beaucoup!

Un de mes amis, passionné de jeux de casino, prétendait qu'il est possible de gagner à la roulette. Je lui ai dit qu'il avait tort parce qu'il est mathématiquement démontré qu'on ne pouvait gagner. Quelle ne fut pas ma surprise lorsqu'il m'a rétorqué :

«Celui qui joue jusqu'à ne plus rien avoir va tout perdre. Il y a donc une façon (au moins) de mal jouer au casino. Mais alors, il y a certainement aussi une façon de bien jouer.»

Je suis resté interloqué et je n'ai pas su lui répondre sur le coup. J'ai l'esprit de l'escalier, aussi je lui réponds ici.

Règles et probabilités

Dans n'importe quel jeu, à chaque fois que l'on mise, il existe une probabilité p de gagner et une probabilité q de perdre sa mise. Il est certain que, soit on gagne, soit on perd! Aussi la somme $p + q$ est-elle égale à 1, et q est égal à $1 - p$. Supposons que, comme à pile ou face, celui qui gagne récupère sa mise plus une somme égale à sa mise ; quand on perd, on laisse sa mise à l'autre joueur, que nous dénommerons *la banque*. Dans les casinos, des jeux de ce type, tels le rouge et le noir à la roulette, donnent aux parieurs une chance de gagner inférieure à 1/2. Le jeu n'est alors pas équitable, et l'on soupçonne que c'est pourquoi les casinos sont des entreprises rentables. Nous verrons dans ce qui suit que la rentabilité des casinos sur le long terme est garantie par les mathématiques.

Quelle est la probabilité p des jeux qu'on vous propose? Si vous trouvez un ami qui accepte de faire la banque et que vous jouez à pile ou face avec une pièce non truquée, votre probabilité p de gain est égale à 1/2. C'est la même probabilité que si vous jouiez sur une couleur à une roulette équitable. À la *roulette simple* (dont l'invention est attribuée à Pascal et qui a été introduite à Paris en 1765), si vous jouez sur noir, vous gagnez quand l'un des 18 numéros noirs sort ; vous perdez quand l'un des 18 numéros rouges sort et quand le zéro (qui est vert) sort. Ainsi la probabilité de gain p est égale à 18/37, soit 0,4864..., car il y a 37 numéros de 0 à 36. À la *roulette française*, la règle est un peu plus compliquée, car quand le zéro sort votre mise reste *prisonnière* jusqu'à ce qu'un prochain lancement de la bille vous la fasse perdre ou récupérer (sans gain), et votre probabilité de gain p est égale à 36/73, soit 0,4931... *(voir l'explication de ce 36 / 73 dans l'encadré 1)*. À la *roulette américaine*, il y a un zéro et un double zéro verts, tous les deux favorables à la banque, sans système de mises prisonnières. Votre probabilité de gain p est de 18/38, soit 0,4736... Il existe aussi une *roulette mexicaine*, avec un triple zéro, correspondant à un $p = 18/39 = 0,4615$, mais c'est pour les *gringos*.

Pour calculer le gain de la banque, imaginons que 100 francs sont misés sur le noir et comptabilisons ce que, en moyenne, la banque perd (c'est-à-dire paie) et gagne. Dans une proportion de p cas, elle perd 100 francs ; dans une proportion de $1 - p$ cas, elle gagne 100 francs. Aussi la banque gagne en moyenne : $100\,(1 - p) - 100p$ francs, soit $100\,(1 - 2p)$ francs, que l'on appelle parfois *l'espérance mathématique* de gain de la banque pour 100 francs misés. Dès que p est inférieur à 1/2, alors $1 - 2p$ est positif, et donc la banque gagne en moyenne.

Ce gain moyen de la banque pour 100 francs misés est de 0 franc à pile ou face (ce jeu n'est pas proposé dans les casinos!) ; de 1,36 franc à la roulette française (avec système des mises prisonnières) ; de 2,70 francs pour la roulette simple, de

Bibliographie

Chapitre 1
La désespérante espérance des jeux paradoxaux

Y. Delmas-Rigoutsos, *Les paradoxes et le savoir. Étude historique, épistémologique et logique*, thèse École polytechnique, Centre de recherche en épistémologie appliquée, 10 janvier 1998.

D. Dennett, *La stratégie de l'Interprète*, NRF Essais, Gallimard, Paris, 1990.

N. Falletta, *Le livre des paradoxes*, éditions Belfond, 1985 (traduction française de *The Paradoxicon*, Doubleday and Co., New York, 1983).

M. Gardner, *La magie des paradoxes*, Bibliothèque Pour La Science, Paris, 1993.

P. N. Johnson-Laird, L'ordinateur et l'esprit, éditions Odile Jacob, Paris, 1994.

D. Kahneman et A. Tversky, *La psychologie des préférences*, *Pour La Science*, pp. 54-60, mars 1982.

J. Leslie, *The End of the World. The Science and Ethics of Human Extinction*, Routledge, New York, 1996.

E. Shafir, *Uncertainty and the Difficulty of Thinking Through Disjunctions*, in *Cognition*, 50, pp. 403-430, 1994.

R. Smullyan, *Les énigmes de Shéhérazade*, éditions Flammarion, 1998.

A. Tversky et D. *Kahneman*, *Advances in Prospect Theory*, in *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, pp. 297-323 1993.

C. Walter, *Espérance morale et bijoux de famille*, in *Pour la Science*, n° 244, p. 17, février 1998.

C. Walter, *La grande peur de l'inconnue*, in *Pour la Science*, n° 243, p. 12, février 1998.

Chapitre 2
Calculer et voter avec un jeu de cartes

C. Crépeau et Joe Kilian, *Discreet Solitary Games*. Advances in Cryptology : Proceedings of Crypto'93, Springer-Verlag, 1993.

J.-P. Delahaye, *Informatique, logique et paradoxes*, Belin, 1995.

A. Salomaa, *Conjugate Words, Cuts of the Deck and Cryptographic Protocols*, in *Bulletin of the Association for Theoretical Computer Science*, n° 59, pp. 136-149, juin 1996.

Chapitre 4
Le jeu explosif des commentaires itérés

V. Bronstein et A. Fraenkel, *On a Curious Property of Counting Sequences*, in *American Mathematical Monthly*, p. 560-563, juin 1994.

J. Conway, *The Weird and Wonderful Chemistery of Audioactive Decay*, in *Open Problems in Communication and Computation* (T. Cover Ed.), Springer-Verlag, pp. 173-188, 1987.

B. Germain-Bonne, *Mots autodescriptifs et codescriptifs*, Publication du Laboratoire d'analyse numérique de l'Université de Lille, n° 332, 1994.

M. Hilgemeir, *Die Gleichniszahlen-Reihe*, in *Bild der Wissenschaft*, n° 12, pp. 194-195, 1986.

H. Lehning, *Quelle est la meilleure preuve?*, in *Quadrature*, n° 11, pp. 5-12, 1992.

N.J.A. Sloane et S. Plouffe, *The Encyclopedia of Integer Sequences*, Academic Press, Harcourt Brace and Company, San Diego, 1995.

Chapitre 5
Le jeu de la vie toujours vivant

D. I. Bell, *Spaceships in Conway's Game of Life*, NEC Information Systems, Canberra, Australie, dbell@pdact.necisa.oz.au, 1993.

J. H. Conway, E. R. Berlekamps et R. K. Guy. Winning, *Ways for your mathematical plays*, Academic Press, 1982.

M. Gardner, *The game of life*, Mathematical Games, in *Scientific American*, 10-1970, 11-1970, 12-1970, 1-1971, 2-1971, 3-1971, 4-1971, 11-1971, 1-1972, 12-1975.

M. Gardner, *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*, W. H. Freeman, New York and San Francisco, 1983.

W. Poundstone, *The Recursive Universe. Cosmic complexity and the limit of scientific knowledge*, Oxford Univ. Press. 1985.

Chapitre 6
Jeux, réussites et tours avec des cartes bifaces

Martin Gardner, *Math' Festival*, chap. 6, Bibliothèque *Pour La Science*, Paris, 1981.

Richard Wollmer, *Le principe de Gilbreath*, Magix, éditions du Spectacle, 3, rue de la Klebsau, 67100 Strasbourg.

Roland Yéléhada, *Janus : le jeu de cartes à double face*, à paraître.

Chapitre 7
Des jeux infinis aux grands nombres

J. DAWSON, *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel*, A.K. Peter Wellesley, Massachusetts, 1997.

P. DEHORNOY, *Un rôle nouveau pour la théorie des ensembles?*, Département de mathématiques, Université de Caen, mars 1995.

P. DEHORNOY, *L'art de la tresse*, in *Dossier Pour la Science : La science des nœuds*, pp. 68-74, avril 1997.

Y. GUREVICH, *Infinite Games and Determinacy*, in *Bulletin EATCS (European Association for Theoretical Computer Science)*, n° 38, pp. 93-100, juin 1989.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, New York, 1994.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

D. MARTIN et J. STEEL, *A Proof of Projective Determinacy*, in *Journal of the American Mathematical Society*, n° 2, pp. 71-125, 1989.

H. WOODIN, *Large Cardinal Axioms and Independence : The Continuum Problem Revisited*, in *Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n° 3, pp. 31-35, 1994.

Handbook of Mathematical Logic, sous la direction de J. Barwise, North Holland, Amsterdam, 1977.

Chapitre 8
Les nombres-univers jouent aux combinaisons

John D. BARROW et Franck J. TIPLER, *Is the Universe Big Enough to Contain all Possibilities?*, R.R. 1993.

Jorge Luis BORGES, *Fictions*, éditions Gallimard, Paris, 1951.

Jean-Paul DELAHAYE, *Cinq classes d'idées*, chapitre 3 de *Information, complexité et hasard*, éditions Hermès, Paris, 1994.

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre π*, Bibliothèque Pour la Science, 1997.

David GALE, *Popular Mathematics*, in *Math. Intel.*, vol. 14, n° 3, pp. 62-64, 1992 (pour une preuve de ce qui est affirmé sur 2^n).

Franck J. TIPLER, *The Omega Point as Eschaton : Answers to Pannenberg's Questions for Scientifics*, Zygon, vol. 24, n° 2, pp. 217-253, 1989.

Franck J. TIPLER, *The Physics of Immortality*, Doubleday, 1994.

Chapitre 9
Le jeu agité de la coopération

R. AXELROD, *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, Inc. Publishers, New York, 1984. Traduction française : *Donnant-donnant*, éditions Odile Jacob, Paris, 1992.

R. AXELROD, *The Complexity of Cooperation. Agent-based Models of Competition and Collaboration*, Princeton Studies in Complexity, 1997.

B. BEAUFILS, J.-P. DELAHAYE et P. MATHIEU, *Our Meeting with Gradual : A Good Strategy for the Iteated Prisoner's Dilemma*, in *Intern. Conf. on Artificial Life V* (ALIFE. V), pp. 159-165, 16-18 mai 1996, Nara (Japon).

B. BEAUFILS, J.-P. DELAHAYE et P. MATHIEU, *Complete Classes of Strategies for the Classical Iterated Prisoner's Dilemma*, The 7th Annual Conference on Evolutionary Programming, Proceedings, San Diego, 1998.

J.-P. DELAHAYE, *Logique, informatique et paradoxes*, Bibliothèque Pour La Science, Paris, 1995.

J.-P. DELAHAYE et P. MATHIEU, *Complex Strategies in the Iterated Prisoner's Dilemma. Interdiciplinary Intern.* Conf. about Complexe-System Theory and the Social Sciences, University of Hull, Canada. Actes édités par A. Albert, I.O.S. Press, pp. 283-292, Amsterdam, 1995.

B. GUERRIEN, *La théorie des jeux*, éditions Économica, Paris, 1993.

K. LINDGREN et M. G. NORDAHL, *Cooperation and Community Structure in Artificial Ecosystems*, in *Artificial Life*, an Overview, sous la direction de C. Langton, MIT Press, pp. 15-37, 1995.

Chapitre 10
Les jeux de l'information noyée

J. BALTRUSAITIS, *Anamorphoses*, Flammarion, Paris, 1984.

H. BROCH, *Le paranormal*, Éditions du Seuil, Paris, 1985.

J. GUISNEL, *Guerres dans le cyberspace : services secrets et Internet*, La Découverte (Enquêtes), Paris, 1995.

D. R. HOFSTADTER, *Gödel, Escher, Bach ; les brins d'une guirlande éternelle*, InterÉditions, 1985.

D. KAHN, *La guerre des codes secrets : des hiéroglyphes à l'ordinateur*, InterÉditions, Paris 1980 (traduction de *The Codebreakers*, The Macmillan Company, New York, 1967).

J. NINIO, *Stéréomagie*, Éditions du Seuil, Paris, 1994.

C. SAGAN, *Contact*, éditions Mazarine, Paris 1986.

B. SCHNEIER, *Cryptographie appliquée*, International Thomson Publishing, Paris, 1995.

T. «doc» SHIELD, *Psi ou les principes brillants du mentalisme*, éditions Techniques du spectacle, 3, rue de la Klebsau, 67000 Strasbourg, 1981.

Chapitre 11
Le joueur mélange des cartes

J. BEASLEY, *The Mathematics of Games*, Oxford University Press, Oxford, 1989.

J. CONWAY et R. GUY, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, New York, 1996.

S. DEGUY, *Comment battre les cartes*, Mémoire de maîtrise encadré par G. Fleury, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1997.

P. DIACONIS, R.L. GRAHAM et W.M. KANTOR, *The Mathematics of Perfects Shuffles*, in *Advances in Applied Mathematics*, n° 4, pp. 175-196, 1983.

J. HUGARD et F. BRAUE, *Expert Card Technique : Close-Up Table Magic*, Dover Publication, New York, 1974.

R. VOLMER, *Les trésors du pharaon*, éditions du spectacle, 6 rue de la Klebsau, 67100 Strasbourg, 1988.

R. VOLMER, *Le principe de Gilbreath*, éditions du spectacle, 1991.

Chapitre 12
Le jeu du vote et ses paradoxes

James ASPNES, Richard BEIGEL, Merrick FURST et Steven RUDICH, *The Expressive Power of Voting Polynomials*, 23rd Annual acm Symposium on Theory of Computing, pp. 402-409, 1991.

Douglas BLAIR et Robert POLLACK, *La logique du choix collectif*, in *Pour La Science*, pp. 104-111, octobre 1993.

J.L. BOURSIN, *Les dés et les urnes. Les calculs de la démocratie*, éditions du Seuil, 1990.

Gilles COHEN, *Mathématiques du citoyen : élections piège à... Matheux*, in *Tangente*, n° 30, pp. 12-15, janvier-février 1993.

Nicholas FALLETTA, *Le livre des paradoxes*, chapitre 5, éditions Belfond, 1985.

A.D. TAYLOR, *Mathematics and Politics. Voting, Power and Proof*, Springer-Verlag, New York, 1995.

Chapitre 13
Le jeu du voyageur et baguenaudiers

J.-P. ALLOUCHE, D. ASTOORIAN, J. RANDALL et J. SHALLIT, *Morphisms, Squarefree Strings, and the Tower of Hanoi Puzzle*, in *The American Mathematical Monthly*, pp. 651-658, 1994.

A. DELEDICQ, *Mathématiques buissonnières*, éditions CEDIC, 1975.

P. van DELFT et J. BOTERMANS, *Creative Puzzles of the World, Key Curriculum Press*. Trad. française : Mille casse-tête du monde entier, éditions du Chêne, 1977.

A. DEWDNEY, *Le Yin et le Yang, récursivité et itérations, les Tours de Hanoï et le Baguenaudier*, in *Récréations informatiques*, *Pour la Science*, février 1985.

M. GARDNER, *Knotted Doughnuts and other Mathematical Entertainment, chapitre 2 : The Binary Gray Code*, W.H. Freeman and Company, 1996 (contient une bibliographie détaillée).

E. LUCAS, *Récréations mathématiques*, tome 1, Paris 1891. Réédition Librairie scientifique Blanchard, 1992.

Ian STEWART, *Four Encounters with the Sierpinski's Gasket*, in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 17, n° 1, pp. 52-64, 1995.

Chapitre 14
L'art de ranger un jeu

T. CORMEN, C. LEISERSON et R. RIVEST, *Introduction à l'algorithmique*, Éditions Dunod, 1994. Traduction de : *Introduction to Algorithms*, MIT Press.

C. FROIDEVEAU, M.-C. GAUDEL et M. SORIA, *Type de données et algorithmes*, McGraw-Hill, 1990.

D. KNUTH, *The Art of Computer Programming*, volume 3 : *Sorting and Searching*, Addison-Wesley, 1973.

J.-C. ROUTIER et Eric WEGRZYNOWSKI, *Débuter la programmation avec scheme*, Thomson Publishing, 1997.

Chapitre 15
Images brouillées, images retrouvées

J.-P. DELAHAYE, *Le mélange des cartes*, in *Pour La Science*, mars 1997.

R.L. DEVANEY, *Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1988.

H.-O. PEITGEN, H. JÜRGENS et D. SAUPE, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*, Springer-Verlag, pp. 536-548, 1992.

I. PRIGOGINE et I. STENGERS, *La nouvelle alliance*, Gallimard, chapitre 9, 1979.

Chapitre 16
Le jeu géométrique des preuves sans mots

B. d'AMORE, *Paradoxes en géométrie*, Plot n° 58, 1er trimestre 1992, Association régionale de l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public), Université d'Orléans, pp. 13-18.

N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Algèbre I* (chapitres 1 à 3), Hermann, Paris, 1970.

H. EVES, *An Introduction to the History of Mathematics*, Sixth Edition, Saundners College Publishing, New York, 1992.

M. GARDNER, *Wheels, Life and other Mathematical Amusements*, W.H. Freeman and Company, New York, 1983, chapitre 6, Geometrical Fallacies.

Roger B. NELSEN, *Proofs Without Words : Exercices in Visual Thinking*, Classroom Resource Materials, n° 1, The American Mathematical Association of America, MAA Service Center, Washington DC, 1993.

Chapitre 17
Les fractions jouent avec les chiffres

J. H. CONWAY et R. GUY, *The Book of Numbers*, Copernicus, Springer, 1996.

E. KRANAKIS, *Primality and Cryptography*, John Wiley and Sons, 1986.

M. E. LINES, *A Number for Your Thoughts : Facts and Speculations about Numbers From Euclid to The Latest Computers*, Institute of Physics Publishing, Bristol, 1986, 1993.

Eric W. WEISSTEIN, *Decimal Expansion Maximal Period*, Treasure Troves 1997 http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math

Chapitre 18
La conjecture de Syracuse

J. H. CONWAY, *Unpredictable Iterations*, in *Proc. 1972 Number Theory Conference*, University. of Colorado, Boulder, 1972.

V. KLEE et S. WAGON, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory. Ch. 19 : The 3x + 1 Problem*, in *Math. Assoc. of America*, Dolciani Math. Exposition, n° 11, 1993.

J. LAGARIAS, *The 3x + 1 Problem and its Generalizations*, in *American Mathematical Monthly*, n° 92, pp. 3-23, 1985.

J. LAGARIAS, *The 3x + 1 Problem Annotated Bibliography*, Communication personnelle, novembre 1997.

G.J. WIRSCHING, *The Dynamical System Generated by the 3n + 1 Function, Lecture Note in Mathematics 1681*, Springer, Berlin, 1998.

T. OLIVEIRA E SILVA, *Maximum Excursion and Stopping Time Record Holders for the 3x+1 Problem : Computational Results*, in *Mathematics of Computation*, 1998.

E. ROOSENDAAL, *On the 3x + 1 Problem (1-1998)* : http://personal. computrain.nl/eric/wondrous/

Chapitre 19
Les conquêtes des polyminos

M. GARDNER, *Hexaflexagons and other Mathematical Diversions*, The University of Chicago Press, Chicago, 1988.

S. W. GOLOMB, *Polyominoes. Puzzles, Patterns, Problems and Packing*, Princeton Science Library, Princeton, 1994-1996.

S. W. GOLOMB, *Tiling Rectangles with Polyominoes*, in *The Mathematical Intelligencer*, vol. 18, n° 2, pp. 38-46, 1996.

W. R. MARSHALL, *Packing Rectangles with Congruent Polynominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, vol. 77, n° 2, pp. 181-192, 1997.

G. E. MARTIN, *Polyominoes. A Guide to Puzzles and Problems in Tiling*, in *The Mathematical Association of America*, Spectrum Series, 1996.

H. K. ORMAN, *Pentominoes : A First Player Win, In Game of No Chance*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

M. REID, *Tiling Rectangles and Half Strips with Congruent Polyominoes*, in *Journal of Combinatorial Theory*, Series A, vol. 80, n° 1, 1997.

I. STEWART, *Pavages et tâtonnements*, in *Pour La Science*, pp. 94-99, avril 1990.

Chapitre 20
Les martingales et autres illusions

T. BASS, *The Newtonian Casino*, éditions Longman, 1990.

Y. COURCHESNE, *Les secrets du black jack*, Les Éditions de l'Homme, Montréal, 1993.

P. DEHEUVELS, *La probabilité, le hasard et la certitude*, PUF, 1990.

R. EPSTEIN, *The Theory of Gambling and Statistical Logic*, Academic Press, San Diego, 1970, 1995.

A. NEURISSE, *Les jeux d'argent et de hasard*, éditions Hermé, 1991.

M. ORKIN, *Can you win?*, W.H. Freeman and Company, New York, 1991.

P. TOUGNE, *La mathématique des jeux*, chapitre 18 : «Roulette, loto et probabilités, éditions Pour la Science/Belin, 1990.

Jeux mathématiques
et mathématiques des jeux

John Horton Conway, mathématicien profond et original, s'oblige chaque matin à résoudre une petite énigme mathématique (que lui fournissent ses collègues) avant d'ouvrir son ordinateur. Ainsi échauffé et inspiré, il peut entreprendre ses recherches plus abstraites. Nombre de problèmes mathématiques importants sont nés de telles amusettes sous la plume de Conway... et de bien d'autres. Les mathématiques sont avant tout un jeu de l'esprit : elles naissent dans le cerveau et y fructifient. La surprise est qu'elles s'appliquent à une variété inattendue de sujets. Qui penserait que les mathématiques aient leur mot à dire dans les mélanges des cartes à jouer, dans l'analyse des commentaires des enfants, dans les stratégies de coopération ? Qui imaginerait que les décimales d'un "nombre-univers" (π et e en sont sans doute), contiennent tous les livres possibles, dont l'histoire de votre vie ?

Ce livre contient 20 chroniques de **Jean-Paul Delahaye**, professeur à l'Université de Lille et auteur du *Fascinant nombre π*, Prix d'Alembert 1998 pour la vulgarisation mathématique, décerné par la Société Mathématique de France, et Grand Prix de l'Académie des Sciences 1999.

fnac 1 10020482
SCIENCES-HUMAINES
JEUX MATHEMATIQUES ET MATHEMATIQUES
DELAHAYE J.P. (BELIN/ECOLE ET SOCIE
9 782842 450106
5002-20-204 23/7/2004
Prix : 23,80
Prix adhérent Fnac : 19,75

05 Code 075010

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE